

Elementy badań operacyjnych – programowanie liniowe

1. Wprowadzenie
2. Formalny standardowy model liniowy maksymalizacji (minimalizacji) jako przykład realizacji dwóch klasycznych zasad sprawnego działania
(A. osiągnąć maksymalny efekt przy danych nakładach, albo B. zminimalizować koszty osiągnięcia danego efektu)
3. Przykładowe klasy zagadnień programowania liniowego
 - 3.1. Zagadnienie wyboru asortymentu produkcji
(określić, które wyroby w jakiej ilości produkować, aby osiągnąć jak największe przychody z ich sprzedaży a jednocześnie nie przekroczyć limitów zużycia środków produkcji)
 - 3.2. Zagadnienie diety (mieszanek)
(określić, które produkty żywnościowe, i w jakich ilościach zakupić, aby dostarczyć zawartych w nich, a niezbędnych organizmowi, składników odżywczych przy jak najmniejszych kosztach żywienia)
 - 3.3. Zagadnienie wyboru procesu produkcyjnego
(określić, które procesy technologiczne i z jaką intensywnością należy zastosować, aby osiągnąć pożądany rozmiar produkcji przy jak najmniejszym odpadzie, koszcie)
 - 3.4. Zagadnienia transportowe
 - 3.4.1. Zamknięte i otwarte zagadnienia transportowe
 - 3.4.2. Klasy zagadnień (transportowo-produkcyjne, transportowo-produkcyjno-magazynowe, lokalizacji produkcji, minimalizacji pustych przebiegów)
4. Program dualny
 - 4.1. Program dualny do zagadnienia standardowego
 - 4.2. Niesymetryczne zagadnienie dualne
 - 4.3. Związki między rozwiązaniem zagadnienia pierwotnego i dualnego (podstawowe twierdzenia o dualizmie)
Przejście od programu pierwotnego do dualnego; rozwiązanie zadania dualnego (metodą graficzną – stosowną do rozwiązywania prostych zagadnień programowania liniowego) i powrót do programu pierwotnego (rozwiązanie z wykorzystaniem twierdzenia o różnicach sum dopełniających)
 - 4.4. Interpretacja zmiennych dualnych

Literatura:

- *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, praca zbior. pod red. K. Kukuły, wydanie V, poprawione i rozszerzone, PWN, Warszawa 2007
- *Badania operacyjne*, praca zbior. pod red. W. Sikory, PWE, Warszawa 2008
- Guzik B., *Wstęp do badań operacyjnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Poznań 2009

1. WPROWADZENIE

Sprawność zarządzania przedsięwzięciami i firmami jest jednym z głównych postulatów gospodarki rynkowej. Przy jego realizacji potrzebne są efektywne systemy wspomagania decyzji. Pomocne są tu badania operacyjne, które dostarczają modeli i metod poszukiwania rozwiązań optymalnych w danych warunkach ekonomicznych. Badania operacyjne są stosunkowo młodą dziedziną – rozwinęły się w czasie drugiej wojny światowej. Jak sama nazwa wskazuje, rozwinęły się w związku z problematyką wojskową. Najpierw w Wielkiej Brytanii, potem w Stanach Zjednoczonych przy dowództwach większych jednostek powołano grupy ekspertów składające się z przedstawicieli różnych dyscyplin naukowych, których zadaniem była analiza niektórych zamierzonych operacji. Dziś z perspektywy czasu ocenia się, że największą zasługą tych grup jest to, iż potrafiły wypracować pewne ogólne metody. Metody te umożliwiły analizę wielu wariantów planu pewnej operacji i wybranie wariantu najkorzystniejszego.

Okazało się, że metody badań operacyjnych mają znacznie szersze zastosowanie niż do zagadnień wojskowych, a w szczególności, że mogą być z powodzeniem stosowane do rozwiązywania problemów techniczno-ekonomicznych.

Trzeba jednak zwrócić uwagę, iż historia badań operacyjnych sięga okresu przed II wojną. Wymienić trzeba przede wszystkim nazwisko L.W. Kantorowicza, który w 1939 r. opublikował pracę zawierającą przegląd metod matematycznych do planowania przedsiębiorstwa oraz zawierającą metody rozwiązywania modeli liniowych. Tym samym Kantorowicza uznaje się za twórcę programowania liniowego, które kilka lat później rozwinęło się niezależnie w krajach zachodnich.

Każda działalność (w tym także działalność gospodarcza) odbywa się w określonych warunkach, opiera się na pewnych zasobach (finansowych czy materialnych) oraz zasilaniu informacyjnym i podporządkowana jest określonemu celowi (celom). Warunki działania wyznaczają zakres możliwych planów realizacji określonego przedsięwzięcia. Plany zgodne z wymaganiami narzuconymi przez warunki działania nazywane są **planami (decyzjami) dopuszczalnymi**. Natomiast nie każdy plan dopuszczalny jest jednakowo dobry w świetle celów jaki stawiają sobie podmioty gospodarcze. Stąd powstaje problem wyboru planu najlepszego – **optymalnego**, zgodnie ze sformułowaniem kryterium optymalności. **Badania operacyjne** (zaliczane do nauk o zarządzaniu) dostarczają metod wspomagających podejmowanie decyzji. Można powiedzieć, że badania operacyjne zajmują się analizą celowych działalności (operacji), generowaniem i oceną ilościową różnych decyzji kierowniczych (taktycznych lub strategicznych). W analizie różnych decyzji wykorzystywane są metody matematyczne (szczególnie optymalizacyjne), heurystyczne oraz symulacja komputerowa.

W badaniach operacyjnych wyróżnia się cztery następujące etapy:

1. **Sformułowanie problemu i budowa modelu.**

Należy tu początkowo opisowo określić: o czym mamy decydować, co jest celem działania, jakie są warunki w których działamy, jakie środki wchodzi w grę i co stanowi kryterium umożliwiające ocenę wyników działania, a następnie zapisać to w postaci modelu matematycznego. Model odzwierciedla interesujący nas fragment rzeczywistości z pominięciem mniej istotnych elementów tej rzeczywistości. Budując model matematyczny należy zawsze pamiętać o tym, aby uwzględniał on wszystkie istotne elementy, mogące mieć wpływ na podejmowaną decyzję.

2. **Rozwiązanie modelu**, czyli wyznaczenie decyzji optymalnej.

3. **Weryfikacja modelu** i uzyskanego rozwiązania.

Jest to konieczne, zanim rozwiązanie zostanie zastosowane w praktyce. Chodzi o konfrontację uzyskanego rozwiązania z rzeczywistością w takim zakresie w jakim to jest możliwe. Jeżeli okaże się, że model czy jego rozwiązanie nie jest adekwatne do rzeczywistości, że przeoczono czynniki istotne - powinna nastąpić korekta modelu i poszczególne kroki procedury powinny być powtórzone.

4. **Wdrożenie rozwiązania** i opracowanie systemu kontroli.

Rozwiązany model stanowi wskazówkę do podjęcia decyzji. Równocześnie trzeba pamiętać, że rzeczywistość nie jest statyczna, że podlega nieustannym zmianom (mogą zmienić się warunki działania co wyraża się zmianami wartości parametrów, może się także zmienić charakter relacji występujących w modelu) w związku z tym rozwiązanie które kiedyś uznano za optymalne po pewnym czasie może przestać być optymalnym. System kontroli powinien zapewniać szybką informację o zmianie warunków a także umożliwiać szybką zmianę rozwiązania, by było ono optymalne w nowych warunkach. Bardzo często algorytmy rozwiązywania modeli badań operacyjnych uzupełnione są o dodatkowe moduły (metody) umożliwiające analizę wrażliwości uzyskanego rozwiązania na zmiany parametrów modelu.

Do analizy decyzji niezbędna jest **informacja**, dana jako **parametry modelu**. W zależności od charakteru posiadanych informacji wyróżnia się kilka typów modeli badań operacyjnych. Z typami wiążą się z kolei metody ich rozwiązywania. Jeżeli wszystkie parametry modelu są wielkościami znanymi i stałymi to mamy do czynienia z **modelami deterministycznymi**. W tych modelach każda możliwa decyzja prowadzi do jednoznacznie określonych wyników. Metody stosowane przy rozwiązywaniu modeli deterministycznych to:

- **rachunek różniczkowy** — który umożliwia wyznaczenie ekstremum funkcji wielu zmiennych; stosowany jest jednak tylko do rozwiązywania bardzo prostych problemów,
- **programowanie liniowe** — modele w których wszystkie relacje mają charakter liniowy; metoda ta odgrywa w badaniach operacyjnych szczególną rolę, bowiem w praktyce często spotykamy się z zagadnieniami, które dają się ująć w postaci modelu liniowego, lub za pomocą odpowiednich przekształceń można je sprowadzić do modelu liniowego,
- **programowanie nieliniowe** — pod tą nazwą występuje szereg różnych metod, stosowanych do rozwiązywania problemów, których nie da się opisać bez specjalnego zniekształcania rzeczywistości modelem liniowym.

Jeżeli parametry modelu są nieznane, ale znane są ich rozkłady prawdopodobieństwa, to mamy do czynienia z modelami **w warunkach ryzyka** (modele **statystyczne** lub **probabilistyczne**).

Wreszcie modele, w których nie są znane nawet rozkłady parametrów, a znany jest z reguły tylko zbiór wartości jakie parametry mogą przyjmować nazywane są modelami podejmowania decyzji **w warunkach niepewności** (**modelami strategicznymi**), ich typowym przykładem są modele teorii gier.

Zatem, **rozwiązanie** programu liniowego polega na **wyznaczeniu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych**.

Uniwersalną, numeryczną metodą rozwiązywania programów liniowych jest tzw. **algorytm sympleks**. Jest to procedura iteracyjna (etapowa), która polega na tym, że wyznacza się dowolne początkowe rozwiązanie dopuszczalne, tzw. rozwiązanie bazowe i to rozwiązanie poprawia się w kolejnych iteracjach, aż do momentu stwierdzenia, że dalsza poprawa jest niemożliwa. Odpowiednie procedury zapewniają, że każde kolejne rozwiązanie bazowe jest lepsze (a przynajmniej nie gorsze) od poprzedniego. Poprawa rozwiązań w kolejnych iteracjach polega na osiąganiu coraz wyższej wartości funkcji celu, która jest maksymalizowana (lub coraz niższej wartości funkcji celu, która jest minimalizowana). Jest to procedura pracochłonna i zwykle realizują ją wyspecjalizowane pakiety komputerowe, jak np. CMMS, QSB, Lindo. Można ją także zrealizować w arkuszu kalkulacyjnym Excel, wykorzystując moduł (narzędzie) jakim jest Solver, pamiętając jednakże, aby w opcjach zaznaczyć, iż interesuje nas optymalizacja liniowa, gdyż Solver potrafi także szukać ekstremum (zarówno warunkowego, jak i bezwarunkowego) modeli nieliniowych, ale uruchamia w tym celu podmoduły różniczkowania numerycznego, zupełnie zbędne w optymalizacji liniowej.

W szczególnym przypadku, gdy w modelu występują dwie zmienne decyzyjne – można program liniowy rozwiązać **metodą geometryczną**. Innym szczególnym przypadkiem są modele w których występują więcej niż dwie zmienne decyzyjne ale tylko dwa warunki ograniczające. Do rozwiązania takiego modelu można wykorzystać zależności **pomiędzy programem pierwotnym i dualnym**, tzn. rozwiązać program dualny (w którym będą tylko dwie zmienne decyzyjne), a następnie przejść do rozwiązania programu pierwotnego wykorzystując odpowiednie twierdzenie.

3. PRZYKŁADOWE KLASY ZAGADNIEŃ PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Za pomocą modeli programowania liniowego można opisać bardzo wiele sytuacji decyzyjnych, w których zależności pomiędzy zmiennymi są typu liniowego. Najczęściej omawiane są trzy problemy mikroekonomiczne: **wybór wielkości i struktury produkcji** w zakładzie produkcyjnym, **wybór procesu technologicznego** oraz **problem diety** (mieszanki). Znajomość tych typowych problemów stanowi zwykle podstawę umożliwiającą rozwiązanie także innych problemów pojawiających się w praktyce.

3.1. Wybór asortymentu produkcji w zakładzie przemysłowym.

Zakład (firma) może produkować N wyrobów. Do ich produkcji zużywane są różne środki produkcji, z których część jest dostępna w ograniczonych ilościach, załóżmy że jest do dyspozycji M limitowanych środków produkcji. Dane są **normy zużycia** środków produkcji na jednostkę każdego wyrobu, **zasoby** środków produkcji, **ceny** lub **zyski jednostkowe** ze sprzedaży wyrobów, mogą być także dodatkowe informacje o popycie na produkowane wyroby (maksymalnej ilości jaką będzie można sprzedać lub minimalnej ilości jaką trzeba wyprodukować aby zrealizować zamówienia odbiorców). Zatem parametrami w modelu matematycznym zagadnienia są:

a_{ij} — zużycie i -tego limitowanego środka produkcji na wytworzenie jednostki j -tego wyrobu ($i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$),

b_i — posiadany zasób i -tego limitowanego środka produkcji,

c_j — cena lub zysk jednostkowy ze sprzedaży j -tego wyrobu,

Rozwiązanie:

Ad a) Należy ustalić wielkość produkcji dwóch wyrobów, zatem zmiennymi decyzyjnymi będą: x_1 – wielkość produkcji wyrobu W_1 i x_2 – wielkość produkcji wyrobu W_2 . W warunkach ograniczających należy zapisać, iż wielkości produkcji tych wyrobów powinny być takie, aby nie zostały przekroczone dopuszczalne czasy pracy maszyn. Dla maszyny M_1 warunek będzie miał postać: $2x_1 + x_2 \leq 1000$ (gdzie $2x_1$ to zużycie czasu pracy M_1 na produkcję wyrobu W_1 a x_2 to zużycie czasu pracy tej maszyny na produkcję wyrobu W_2). Analogiczne warunki dla maszyn M_2 i M_3 przyjmują postać: $3x_1 + 3x_2 \leq 2400$ i $1,5x_1 \leq 600$. Ponieważ nie ma tu żadnych dodatkowych ograniczeń dotyczących wielkości produkcji poszczególnych wyrobów, wystarczy dodać warunki brzegowe i funkcję celu maksymalizującą przychód ze sprzedaży: $30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$ (gdzie $30x_1$ to przychód ze sprzedaży wyrobu W_1 , a $20x_2$ to przychód ze sprzedaży wyrobu W_2). Zatem w całości PL dla powyższej sytuacji decyzyjnej ma postać:

$$F(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max.$$

$$1) \quad 2x_1 + x_2 \leq 1000$$

$$2) \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 2400$$

$$3) \quad 1,5x_1 \leq 600$$

$$4) \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Ponieważ w programie występują tylko dwie zmienne decyzyjne można go rozwiązać metodą geometryczną (na układzie współrzędnych). Aby narysować równania poszczególnych prostych należy dla każdej z nich znaleźć dwa punkty przez które jej wykres przechodzi. Najłatwiej jest znaleźć punkty przecięcia prostych z osiami układu współrzędnych. I tak np. dla warunku (1), jeżeli przyjmiemy, że $x_2 = 0$ – wówczas $x_1 = 500$; ten punkt zaznaczamy na osi x_1 . Jeżeli z kolei przyjmiemy $x_1 = 0$ wówczas $x_2 = 1000$; ten punkt zaznaczamy na osi x_2 . Te dwa punkty łączymy prostą a ponieważ warunek (1) ma postać nierówności “ $\leq$ ” – jego geometrycznym obrazem jest półpłaszczyzna leżąca poniżej (na lewo) wraz z punktami należącymi do prostej, co na rysunku zaznaczono za pomocą strzałki skierowanej w dół. Analogicznie zaznaczono na rys. 1.1 pozostałe dwa warunki: prosta (2) przecina oś x_1 w punkcie 800 i oś x_2 w punkcie 800 a warunek spełniają punkty leżące na prostej i poniżej; graficznym obrazem warunku (3) jest półpłaszczyzna poniżej prostej (łącznie z tą prostą) równoległej do osi x_2 o równaniu $x_1 = 400$.

Obszar spełniający wszystkie warunki to pięciobok ABCDE; punkty (o współrzędnych x_1 i x_2) leżące na jego krawędziach (brzegach) i wewnątrz są **rozwiązaniem dopuszczalnym** PL. W tym wieloboku należy znaleźć punkt lub punkty stanowiące rozwiązanie optymalne, przy czym kryterium optymalności jest maksymalizacja przychodu ze sprzedaży, danego funkcją $F(x_1, x_2)$.

Rozwiązanie optymalne, jeśli istnieje, znajduje się zawsze w wierzchołku (lub wierzchołkach, ale wtedy cała krawędź, łącząca te wierzchołki jest rozwiązaniem optymalnym) zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Można je zatem znaleźć obliczając wartości funkcji celu we wszystkich jego wierzchołkach. Współrzędne wierzchołków znajdujemy rozwiązując odpowiednie układy równań dla par przecinających się w nich warunków (prostych). I tak, w naszym przykładzie, mamy:

$$A(0; 0)$$

$$F(A) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0,$$

$$B(400; 0)$$

$$F(B) = 30 \cdot 400 + 20 \cdot 0 = 12\,000,$$

$$C(400; 200)$$

$$F(C) = 30 \cdot 400 + 20 \cdot 200 = 16\,000,$$

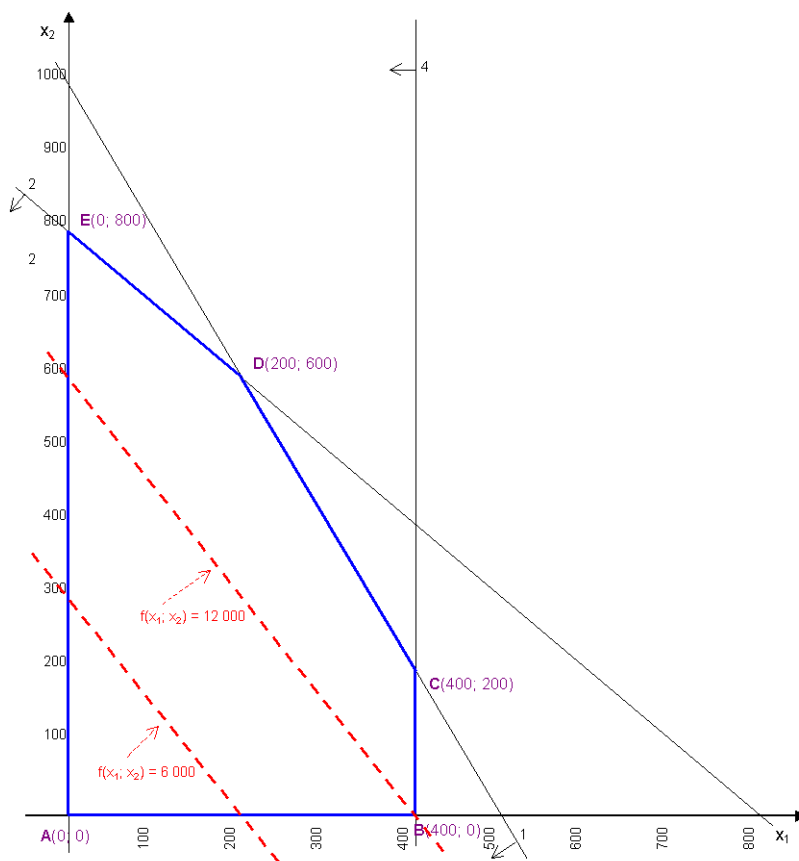
$$D(200; 600)$$

$$F(D) = 30 \cdot 200 + 20 \cdot 600 = 18000,$$

$$E(0; 800)$$

$$F(E) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 800 = 16\ 000.$$

Najwyższą wartość funkcja celu przyjmuje w punkcie D; zatem współrzędne tego punktu stanowią rozwiązanie optymalne problemu.



Rys. 1.1 Rozwiązanie graficzne przykładu 1 punkt a)

Rozwiązanie optymalne można znaleźć także znacznie szybciej. Przyjmuje się mianowicie dowolną wartość funkcji celu (taką aby można było ją nanieść na rysunek) i rysuje jej wykres, dla odróżnienia od warunków ograniczających – na rys. 1.1 zaznaczono ją linią przerywaną. Przyjmijmy np. wartość początkową 6000. Mamy zatem $F(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 = 6000$; funkcja przecina oś x_1 w punkcie 200 i oś x_2 w punkcie 300. Zauważmy, że gdybyśmy przyjęli wartość wyższą np., 12000 to otrzymalibyśmy prostą o równaniu $F(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 = 12000$. Prosta ta byłaby równoległa do pierwszej prostej, ale bardziej oddalona od początku układu współrzędnych. Gdybyśmy natomiast wzięli pewną wartość niższą np. 3000, to prosta $F(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 = 3000$ byłaby też równoległa do prostej pierwszej, ale leżałaby bliżej początku układu współrzędnych. Widzimy zatem, iż gdybyśmy na rysunek nanieśli proste dla różnych wartości $F(x_1, x_2)$, wszystkie one byłyby równoległe do siebie i do pierwszej wyznaczonej prostej. Znalezienie punktu optymalnego sprowadza się do tego, aby w wieloboku rozwiązań dopuszczalnych znaleźć punkt leżący na prostej o najwyższej wartości funkcji celu.

Praktycznie jednak wystarczy wykreślić jedną prostą i ją przesuwając równolegle, w zależności od potrzeb w górę lub w dół, tak aby w przypadku maksymalizacji funkcji celu znaleźć punkt zbioru rozwiązań dopuszczalnych położony możliwie najdalej od początku układu współrzędnych (jeżeli funkcja celu jest minimalizowana – będziemy szukać punktu położo-

$$x_1^* = 200, \quad x_2^* = 600, \quad \text{lub} \quad x_1^* = 400, \quad x_2^* = 200.$$

Przy takich strukturach produkcji przychód ze sprzedaży wyrobów wyniesie 20 000 zł.

Przykład 2. Przedsiębiorstwo produkuje trzy wyroby: A, B, C do produkcji których zużywa m. in. dwa limitowane surowce. W ciągu miesiąca można zużyć nie więcej niż 3000 kg surowca S_1 i nie więcej niż 1500 kg surowca S_2 . Inne niezbędne dane zawiera tabl. 2.

Tablica 2

Surowce	Zużycie surowca (w kg) na jednostkę wyrobu		
	A	B	C
S_1	3	6	8
S_2	6	4	2
Cena wyrobu (zł)	36	54	36

a) Ustalić miesięczną wielkość produkcji tych wyrobów, tak aby zmaksymalizować przychód z ich sprzedaży.

b) Załóżmy, że będzie można dokupić miesięcznie dodatkowe 10 kg surowca S_1 . Jak wpłynie to na przychód ze sprzedaży?

Rozwiązanie:

Ad a) Należy ustalić dzienną wielkość produkcji trzech wyrobów, zatem w modelu zagadnienia wystąpią trzy zmienne decyzyjne: x_1 – wielkość produkcji wyrobu A, x_2 – wielkość produkcji wyrobu B, x_3 – wielkość produkcji wyrobu C. Ograniczeniem w procesie produkcji są tylko zasoby dwóch surowców. Warunek ograniczający zużycie surowca S_1 ma postać:

$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 3000$$

Analogiczny warunek dla surowca 2 ma postać:

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1500$$

Po dodaniu warunków brzegowych i funkcji celu model przyjmuje postać:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 36x_1 + 54x_2 + 36x_3 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 3000$$

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1500$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Ponieważ w modelu występują trzy zmienne decyzyjne, trudno byłoby go rozwiązać metodą geometryczną, natomiast ze względu na tylko dwa warunki ograniczające łatwo można go rozwiązać wykorzystując zależności pomiędzy programem pierwotnym i dualnym, bowiem w programie dualnym (PD) wystąpią tylko dwie zmienne decyzyjne, powiedzmy y_1 i y_2 , odpowiadające warunkom ograniczającym programu pierwotnego (PP). Natomiast kolejne warunki PD konstruujemy ze współczynników stojących przy odpowiednich zmiennych PP. Zgodnie z omówionymi dalej pozostałymi zasadami konstrukcji PD przyjmuje on postać:

$$F(y_1, y_2) = 3000y_1 + 1500y_2 \rightarrow \min$$

$$1) \quad 3y_1 + 6y_2 \geq 36$$

$$2) \quad 6y_1 + 4y_2 \geq 54$$

$$3) \quad 8y_1 + 2y_2 \geq 36$$

$$4) \quad y_1, y_2 \geq 0$$

Jak łatwo sprawdzić, posługując się np. metodą geometryczną, rozwiązanie optymalne programu dualnego oraz optymalna wartość funkcji celu kształtują się:

$$y_1^* = 1,8; \quad y_2^* = 10,8; \quad F(y_1^*, y_2^*) = 3000 \cdot 1,8 + 1500 \cdot 10,8 = 21\,600.$$

Znając rozwiązanie programu dualnego (PD) można przejść do rozwiązania programu pierwotnego (PP) korzystając z przytoczonych dalej twierdzeń. Sprawdzimy zatem jak (ostro czy słabo), dla rozwiązania optymalnego (y_1^*, y_2^*) spełnione są poszczególne warunki PD. Otrzymujemy:

- 1) $3 \cdot 1,8 + 6 \cdot 10,8 = 70,2 > 36 \Rightarrow x_1^* = 0$
- 2) $6 \cdot 1,8 + 4 \cdot 10,8 = 54 = 54$
- 3) $8 \cdot 1,8 + 2 \cdot 10,8 = 36 = 36$

A więc ostro spełniony jest warunek (1), z czego wynika że odpowiadająca mu optymalna wartość zmiennej w PP (x_1^*) przyjmuje wartość 0, natomiast y_1^* i y_2^* są dodatnie, więc odpowiadające im warunki 1) i 2) PP są dla rozwiązań optymalnych x_2^* i x_3^* spełnione słabo (lewa i prawa strona są sobie równe — zachodzą z równością). Wstawiając więc $x_1^* = 0$ do PP otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} 6x_2^* + 8x_3^* &= 3000 \\ 4x_2^* + 2x_3^* &= 1500 \end{aligned}$$

którego rozwiązanie to: $x_2^* = 300, \quad x_3^* = 150$.

Zatem optymalne rozwiązanie zagadnienia (PP), to:

$$x_1^* = 0; \quad x_2^* = 300; \quad x_3^* = 150, \quad F(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 54 \cdot 300 + 36 \cdot 150 = 21600 = F(y_1^*, y_2^*).$$

Jak więc widać, zgodnie z podstawowym twierdzeniem o dualizmie: **wartości funkcji celu dla rozwiązań optymalnych obu programów są sobie równe.**

Należy zatem produkować 300 sztuk wyrobu B i 150 sztuk wyrobu C, natomiast wyrobu A nie produkować. Miesięczny przychód ze sprzedaży tych wyrobów wyniesie 21600 zł.

Ad b) W odpowiedzi na pytanie jak wzrośnie przychód ze sprzedaży wyrobów, jeżeli zasób surowca S_1 wzrośnie o 10 kg wykorzystamy interpretację zmiennych dualnych. Załóżmy na wstępie, że można dokupić 1 kg surowca S_1 i wyznaczmy rozwiązanie układu (przy założeniu, że ten dodatkowy zasób nie wpłynie na zmianę rozwiązania optymalnego):

$$\begin{aligned} 6x_2^* + 8x_3^* &= 3001 \\ 4x_2^* + 2x_3^* &= 1500 \end{aligned}$$

Jest nim $x_2^* = 299,9; \quad x_3^* = 150,2$ ($x_1^* = 0$), a $F(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 36 \cdot 0 + 54 \cdot 299,9 + 36 \cdot 150,2 = 21601,8$. Wzrost zasobu surowca S_1 o 1 kg dał przyrost przychodu ze sprzedaży (wartości funkcji celu) o $\Delta F = 21601,8 - 21600 = 1,8 = y_1^*$.

Można także sprawdzić, iż gdyby o 1 kg wzrósł zasób surowca S_2 , to rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{aligned} 6x_2^* + 8x_3^* &= 3000 \\ 4x_2^* + 2x_3^* &= 1501 \end{aligned}$$

gdzie, powtórzmy raz jeszcze, poszczególne parametry oznaczają:

a_{ij} — ilość i -tego wyrobu uzyskana przy zastosowaniu j -tego procesu technologicznego z jednostkową intensywnością ($i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, N$),

b_i — planowana wielkość produkcji i -tego wyrobu,

c_j — koszt zastosowania j -tego procesu technologicznego z jednostkową intensywnością.

Zagadnienie wyboru procesu technologicznego ma wiele różnych wariantów. Jednym z nich jest problem znany w literaturze jako **problem rozkroju**. Z pewnego surowca (np. kłody drewna, arkusze blachy, bele papieru) należy wykroić określone elementy (belki o pewnej długości, detale o określonym kształcie). Istnieją na ogół różne sposoby rozkroju surowca dające pożądane elementy w różnych ilościach. Sposoby rozkroju to procesy technologiczne. Przez intensywność danego procesu (sposobu rozkroju) rozumie się liczbę jednostek surowca rozkrojonych danym sposobem. Natomiast kosztem jednostkowym jest odpad jaki powstaje po wykrojeniu z surowca tych elementów (lub koszt odpadu). Tę sytuację ilustruje kolejny przykład.

Przykład 3. Klient dostarczył do tartaku kłody o długości 4,4 m, zlecając pocięcie ich tak, aby otrzymać 400 kompletów belek. Na 1 komplet składają się: 1 belka o długości 0,8 m i 3 belki o długości 1,1 m. Należy podać optymalny sposób rozkroju surowca, aby zrealizować zamówienie minimalizując koszt odpadów, jeżeli wiadomo, że 1 m odpadów kosztuje 20 zł.

Rozwiązanie:

Mamy tu do czynienia z bardzo prostymi sposobami rozkroju – kłody drewna należy pociąć na krótsze belki, sposoby te łatwo można znaleźć. Przykładowo z 1 kłody można otrzymać 5 belek o długości 0,8 m; zużyje się na to $5 \cdot 0,8 = 4$ m, zatem odpad wyniesie 0,4 m ($4,4 - 4 = 0,4$). Inny sposób rozkroju może dać np. 4 belki o długości 0,8 m i 1 belkę o długości 1,1 m, wykorzysta się przy tym, sposobie $4 \cdot 0,8 + 1 \cdot 1,1 = 4,3$ m, zatem odpad wyniesie 0,1 m. Wszystkie sposoby rozkroju zestawiono w poniższej tabeli — uwzględniono w niej tylko sposoby efektywne, czyli takie które dają odpad mniejszy niż 0,8 m (czyli mniejszy niż długość krótszej belki). W ostatnim wierszu tabeli podany jest odpad wyrażony w zł (odpad w metrach pomnożony przez 20 zł czyli koszt 1 m odpadu).

Belki o długości	Sposoby rozkroju 1 kłody					Zamówiona ilość
	I	II	III	IV	V	
0,8 m	5	4	2	1	0	400
1,1 m	0	1	2	3	4	1200
Odpad (m)	0,4	0,1	0,6	0,3	0	
Odpad (zł)	8	2	12	6	0	

W ostatniej kolumnie tej tabeli podano ilości belek jakie należy klientowi dostarczyć (ilości belek w komplecie pomnożone przez liczbę zamówionych kompletów – 400).

Jak widać istnieje 5 możliwych sposobów rozkroju 1 kłody, zatem w modelu zagadnienia wystąpi 5 zmiennych decyzyjnych: $x_1, \dots, x_5$ które będą oznaczać intensywność zastosowania poszczególnych sposobów rozkroju, czyli inaczej ilość kłód (o dł. 4,4 m) pociętych sposobami 1–5. Model matematyczny zagadnienia ma postać:

$$F(x_1, \dots, x_5) = 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 6x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 400$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \geq 1200$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

W modelu występuje 5 zmiennych decyzyjnych, ale tylko dwa warunki ograniczające można zatem go rozwiązać wykorzystując zależności pomiędzy programem pierwotnym i dualnym. Program dualny dla powyższego modelu ma postać:

$$F(y_1, y_2) = 400y_1 + 1200y_2 \rightarrow \max$$

$$1) \quad 5y_1 \leq 8$$

$$2) \quad 4y_1 + y_2 \leq 2$$

$$3) \quad 2y_1 + 2y_2 \leq 12$$

$$4) \quad y_1 + 3y_2 \leq 6$$

$$5) \quad 4y_2 \leq 0$$

$$6) \quad y_1, y_2 \geq 0$$

a jego rozwiązaniem optymalnym, znalezionym metodą geometryczną, jak łatwo sprawdzić [zbiór rozwiązań dopuszczalnych redukuje się do odcinka OA, gdzie $O(0; 0)$ oraz $A(0,5; 0)$] bez wątplenia jest współrzędne punktu A, tj.:

$$y_1^* = 0,5; \quad y_2^* = 0; \quad F(y_1^*, y_2^*) = 400 \cdot 0,5 + 1200 \cdot 0 = 200.$$

Aby wrócić do rozwiązania PP sprawdzamy, jak (ostro czy słabo) w rozwiązaniu optymalnym PD spełnione są jego poszczególne warunki. Podstawiając optymalne wartości zmiennych dualnych mamy:

$$1) \quad 5 \cdot 0,5 = 2,5 < 8 \quad \Rightarrow x_1^* = 0$$

$$2) \quad 4 \cdot 0,5 + 0 = 2$$

$$3) \quad 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0 = 1 < 12 \Rightarrow x_3^* = 0$$

$$4) \quad 0,5 + 3 \cdot 0 = 0,5 < 6 \quad \Rightarrow x_4^* = 0$$

$$5) \quad 4 \cdot 0 = 0$$

Wiedząc, że $x_1^* = x_3^* = x_4^* = 0$ można łatwo znaleźć rozwiązanie programu pierwotnego:

$$4x_2^* = 400 \quad \Rightarrow x_2^* = 100$$

$$x_2^* + 4x_5^* > 1200$$

Zauważmy, że ponieważ $y_2^* = 0$; zgodnie z twierdzeniem o dualności odpowiadający tej zmiennej warunek w PP (warunek 2) jest spełniony ostro; stąd: $4x_5 \geq 1200 - 100$; $x_5^* > \frac{1100}{4} = 275$. Zadanie ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych:

$$x_2^* = 100, x_5^* \geq 275; F(x_1^*, \dots, x_5^*) = 8 \cdot 0 + 2 \cdot 100 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 275 = 200 \text{ zł} = F(y_1^*, y_2^*).$$

Należy zatem 100 kłód pociąć sposobem drugim i co najmniej 275 kłód sposobem piątym. Łączny koszt odpadów wyniesie 200 zł.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na interpretację zmiennych dualnych. Również w tym przypadku są to ceny dualne – ceny 1 dodatkowego wyrobu. Przypomnijmy raz jeszcze, że w myśl twierdzenia o dualizmie wartość zmiennej dualnej y_i informuje o ile wzrośnie wartość

Tablica 4

Mieszanka	Zawartość składnika w 1 kg mieszanki			Cena 1 kg mieszanki (zł)
	A	B	C	
M ₁	6	15	24	4,5
M ₂	15	10	4	3

Wiedząc ponadto, że mieszanki M₁ nie należy podawać więcej niż M₂ i nie więcej niż 4 kg w ciągu miesiąca należy odpowiedzieć na następujące pytania:

- w jakiej ilości zakupić mieszanki M₁ i M₂, aby zwierzęta otrzymały potrzebne składniki odżywcze przy możliwie najniższych kosztach zakupu mieszanek.
- czy optymalna dieta ulegnie zmianie, jeżeli mieszanka M₂ podrożeje do 4 zł.

Rozwiązanie:

Ad a) Należy ustalić optymalną wielkość zakupu dwóch mieszanek, zatem w modelu występują dwie zmienne decyzyjne: x_1 - wielkość zakupu mieszanki M₁ i x_2 - wielkość zakupu mieszanki M₂, a model opisujący powyższy problem ma postać:

$$F(x_1, x_2) = 4,5x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

- $6x_1 + 15x_2 \geq 90$
- $15x_1 + 10x_2 = 150$
- $24x_1 + 4x_2 \leq 96$
- $x_1 \leq x_2$
- $x_1 \leq 4$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Zauważmy, że geometrycznym obrazem warunku (4) jest prosta $x_1 = x_2$ i punkty leżące na lewo od niej. Zbiorem rozwiązań dopuszczalnych jest odcinek prostej (2) (warunek (2) jest spełniony wyłącznie przez punkty leżące na prostej) pomiędzy punktami A(0; 15) i B(2;12). Odcinek ten jest równocześnie rozwiązaniem optymalnym zadania, bowiem wartość funkcji celu w obydwu punktach jest taka sama: $F(A) = 4,5 \cdot 0 + 3 \cdot 15 = 45 = F(B) = 4,5 \cdot 2 + 3 \cdot 12 = 45$.

Przykład 5. Odlewnia powinna wyprodukować w ramach zamówienia 1600 ton żeliwa zawierającego 62,5% Si i 18,75% Mn. W celu realizacji zamówienia odlewnia może kupić czterech rodzajów stopów żeliwnych, ale o innej proporcji wyżej wymienionych pierwiastków. Zawartości pierwiastków i ceny zakupu stopów, podanych w tablicy 5.

- Ile należy zakupić poszczególnych stopów, aby wyprodukować żeliwo o pożądanym składzie ponosząc możliwie najniższe koszty zakupu stopów.
- Jak wzrosną koszty zakupu stopów, jeżeli wymagania dotyczące zawartości Si w żeliwie wzrosną o 10 ton.

Tablica 5

Stop	% zawartość pierwiastka w stopie		Cena 1 tony stopu (zł)
	Si	Mn	
S ₁	30	30	45
S ₂	60	40	54
S ₃	70	-	42
S ₄	80	20	36

Rozwiązanie:

Ad a) Przykład ten dotyczy zagadnienia mieszanki, będącego uogólnieniem zagadnienia diety. Zagadnienie mieszanki dotyczy ustalenia ilości podstawowych surowców jakie należy zmieszać (zakupić) aby otrzymać produkt o pożądanym składzie chemicznym przy możliwie najniższych kosztach zakupu surowców.

W tym przypadku surowcami są cztery rodzaje stopów, zatem zmienne decyzyjne x_1, x_2, x_3, x_4 to odpowiednio ilości ton stopów S₁, ... S₄. Wytworzone (w ilości 1600 ton) żeliwo powinno zawierać 62,5% (czyli $62,5\% \cdot 1600 = 1000$ ton) Si oraz 18,75% (czyli $18,75\% \cdot 1600 = 300$ ton) Mn. Program liniowy dla powyższego problemu przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 F(x_1, \dots, x_4) &= 45x_1 + 54x_2 + 42x_3 + 36x_4 \rightarrow \min \\
 0,3x_1 + 0,6x_2 + 0,7x_3 + 0,8x_4 &\geq 1000 \\
 0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_4 &\geq 300 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Najłatwiej można go rozwiązać wykorzystując zależności pomiędzy PP i PD. Program dualny przedstawiono poniżej:

$$\begin{aligned}
 F(y_1, y_2) &= 1000y_1 + 300y_2 \rightarrow \max \\
 0,3y_1 + 0,3y_2 &\leq 45 \\
 0,6y_1 + 0,4y_2 &\leq 54 \\
 0,7y_1 &\leq 42 \\
 0,8y_1 + 0,2y_2 &\leq 36 \\
 y_1, y_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem optymalnym PD są współrzędne punktu P, w którym przecinają się proste (2) i (4). Rozwiązując układ tych dwu równań otrzymujemy: $y_1^* = 18$, $y_2^* = 108$, a wobec tego $F(y_1^*, y_2^*) = 1000 \cdot 18 + 300 \cdot 108 = 50400$. Łatwo też sprawdzić, że te rozwiązania optymalne słabo (jako równości) spełniają warunki (2) i (4), natomiast ostro spełniają warunki (1) i (3). Stąd wiadomo, że $x_1^* = x_3^* = 0$. Pozostaje zatem rozwiązanie układu równań:

$$\begin{aligned}
 0,6x_2^* + 0,8x_4^* &= 1000 \\
 0,4x_2^* + 0,2x_4^* &= 300
 \end{aligned}$$

które jest następujące:

$$x_2^* = 200, x_4^* = 1100 \text{ a wobec tego: } F(x_1^*, \dots, x_4^*) = 45 \cdot 0 + 54 \cdot 200 + 42 \cdot 0 + 36 \cdot 1100 = 50400.$$

Do produkcji żeliwa należy zatem użyć 200 ton stopu S_2 i 1100 ton stopu S_4 , łączne koszty zakupu surowców wyniosą 50 400 zł.

Ad b) Aby odpowiedzieć na pytanie: jak wzrosną koszty zakupu stopów, jeżeli wymagania dotyczące zawartości Si w żeliwie wzrosną o 10 ton, tj. do 1010 ton, można wykorzystać interpretację zmiennych dualnych lub rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned}0,6x_2^* + 0,8x_4^* &= 1010 \\ 0,4x_2^* + 0,2x_4^* &= 300\end{aligned}$$

i porównać wartości funkcji celu.

Otrzymujemy: $x_2^* = 190$, $x_4^* = 1120$. $F(x_1^*, \dots, x_4^*) = 54 \cdot 190 + 36 \cdot 1120 = 50580$. Zatem koszty zakupu surowców wzrosły o $\Delta F = 50580 - 50400 = 180$ zł. Analogiczny wynik daje: $y_1^* \cdot 10 = 18 \cdot 10 = 180$.

3.4. Zagadnienia transportowe

Modele zagadnień transportowych ułatwiają opracowywanie planów przewozu jednorodnych towarów z różnych źródeł zaopatrzenia do odbiorców zgłaszających zapotrzebowanie na te towary. Kryterium optymalizacji planu przewozów jest najczęściej minimalizacja łącznych kosztów transportu (rzadziej minimalizacja odległości lub czasu transportu).

3.4.1 Zamknięte i otwarte zagadnienia transportowe

Ogólny model zagadnienia jest następujący. Danych jest M dostawców, z których każdy dysponuje A_i jednostkami towaru. Zapotrzebowanie na towar zgłasza N odbiorców, każdy w ilości B_j jednostek. Każdy z dostawców może zaopatrywać dowolnego odbiorcę i odwrotnie, każdy odbiorca może otrzymać towar od dowolnego dostawcy.

Dane są ponadto c_{ij} – jednostkowe koszty transportu towaru od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy ($i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, N$). Zakłada się, że całkowity koszt transportu jest sumą kosztów transportu na poszczególnych trasach.

Należy **opracować plan przewozu towaru pomiędzy dostawcami i odbiorcami**, tak aby łączne koszty transportu były możliwie najniższe. Plan taki ma określić **ile towaru powinien dostarczyć i -ty dostawca j -temu odbiorcy** i te wielkości są **zmiennymi decyzyjnymi** – x_{ij} w modelach zagadnień transportowych.

Zauważmy jeszcze, że aby model taki miał rozwiązanie musi być spełniony warunek:

$$\sum_{i=1}^R A_i \geq \sum_{j=1}^N B_j,$$

(podaż dostawców powinna być nie mniejsza niż łączne zapotrzebowanie odbiorców).

Jeżeli warunek jest spełniony z równością, tzn. $\sum_{i=1}^R A_i = \sum_{j=1}^N B_j$, mamy do czynienia z **zamkniętym zagadnieniem transportowym (ZZT)**, jeżeli natomiast warunek jest spełniony z nierównością (ostro) – $\sum_{i=1}^R A_i > \sum_{j=1}^N B_j$, jest to tzw. **otwarte zagadnienie transportowe (OZT)**.

Model zagadnienia transportowego zamkniętego ma postać:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} = \min \quad - \text{funkcja celu}$$

(minimalizacja łącznych kosztów transportu - od wszystkich dostawców do wszystkich odbiorców).

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad - \text{warunki dla dostawców}$$

(i-ty dostawca ma dostarczyć wszystkim odbiorcom tyle towaru ile posiada; warunków tych jest tyle ilu dostawców, czyli R)

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad - \text{warunki dla odbiorców}$$

(j-ty odbiorca ma otrzymać od wszystkich dostawców tyle towaru, ile potrzebuje; warunków tego typu jest N)

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N) \quad - \text{warunki brzegowe}$$

Modele zagadnień transportowych są szczególnym przypadkiem modeli liniowych, można zatem je rozwiązywać za pomocą algorytmu simpleks. Jednak specyficzna struktura warunków ograniczających w tych modelach sprawia, że mogą one być rozwiązywane za pomocą algorytmów bardziej efektywnych.

Uniwersalną metodą rozwiązywania zagadnień transportowych jest **algorytm transportowy** (raczej są, bo istnieje wiele alternatywnych algorytmów transportowych). Jest to procedura iteracyjna. W pierwszym kroku stosując jedną z wielu znanych metod, wyznacza się początkowe rozwiązanie dopuszczalne, które następnie poprawia się w kolejnych iteracjach, aż do momentu stwierdzenia, że dalsza poprawa (obniżka wartości funkcji celu) jest niemożliwa. Podobnie jak nie omawialiśmy algorytmu simpleks, tak nie będziemy też omawiać algorytmów transportowych, bo są procedury pracochłonne i dzisiaj realizowane bez większych problemów za pomocą gotowych pakietów komputerowych. Pokazujemy jedynie jak można wyznaczyć początkowe rozwiązanie dopuszczalne.

Algorytm transportowy zakłada, że zadanie jest zbilansowane (zamknięte). Zagadnienie otwarte (OZT) można sprowadzić do zamkniętego (ZZT) przez wprowadzenie fikcyjnego $N+1$ -szego odbiorcy, którego zapotrzebowanie B_{N+1} jest równe nadwyżce podaży nad popytem, tzn. $B_{N+1} = \sum_{i=1}^R A_i - \sum_{j=1}^N B_j$. W rzeczywistości fikcyjnym odbiorcą jest najczęściej magazyn znajdujący się u dostawców, tzn. zakłada się że nadwyżka towaru pozostanie w magazynach dostawców. Mogą być podane dodatkowo jednostkowe koszty magazynowania u poszczególnych dostawców ($c_{i,N+1}$) lub też zakłada się, że koszty magazynowania są pomijalnie małe w porównaniu z kosztami transportu (tzn. $c_{i,N+1} = 0$). W funkcji celu minimalizuje się łączne koszty transportu i magazynowania.

Poniżej po lewej stronie przedstawiono ogólny model zagadnienia otwartego, po stronie prawej zagadnienie otwarte jest sprowadzone do zamkniętego.

	Model OZT	OZT sprowadzone do ZZT
Funkcja celu:	$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} = \min$	$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N+1} c_{ij} x_{ij} = \min$
warunki dla dostawców:	$\sum_{j=1}^N x_{ij} \leq A_i \quad (i=1, \dots, M),$	$\sum_{j=1}^{N+1} x_{ij} = A_i \quad (i=1, \dots, M),$
warunki dla odbiorców:	$\sum_{i=1}^M x_{ij} = B_j \quad (j=1, \dots, N),$	$\sum_{i=1}^M x_{ij} = B_j \quad (j=1, \dots, N+1),$
warunki brzegowe	$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, M; \\ j=1, \dots, N)$	$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, M; \\ j=1, \dots, N+1)$

3.4.2 Klasy zagadnień transportowych

Przykład 6. Trzy magazyny zaopatrują w cukier cztery zakłady cukiernicze. Magazyny posiadają odpowiednio: 70, 50 i 80 ton cukru natomiast zapotrzebowanie poszczególnych zakładów cukierniczych wynosi: 40, 60, 50 i 50 ton. Koszty transportu 1 tony cukru z magazynów do zakładów cukierniczych (w zł) podano w tablicy 6.

Tablica 6

Dostawcy \ Odbiorcy	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄
M ₁	125	100	125	50
M ₂	100	200	175	75
M ₃	150	100	175	200

Należy opracować plan przewozu cukru z magazynów do zakładów cukierniczych tak, aby łączne koszty transportu były możliwie najniższe.

Rozwiązanie:

Przepiszmy tablicę 6 uzupełniając ją o dodatkowy wiersz i kolumnę do których wpisujemy odpowiednio podaż i popyt:

Tablica 6a

Dostawcy \ Odbiorcy	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	A _i
M ₁	125	100	125	50	70
M ₂	100	200	175	75	50
M ₃	150	100	175	200	80
B _j	40	60	50	50	

Ponieważ $\sum_{i=1}^3 A_i = 70 + 50 + 80 = 200$; $\sum_{j=1}^4 B_j = 40 + 60 + 50 + 50 = 200$; jest to zatem zagadnienie transportowe zamknięte. Zmienne decyzyjne x_{ij} to ilość ton cukru, jaką należy przewieźć z i -tego magazynu ($i = 1, 2, 3$) do j -tego zakładu cukierniczego ($j = 1, \dots, 4$); zmiennych decyzyjnych będzie $3 \cdot 4 = 12$. Model zagadnienia jest następujący:

$$K(x_{ij}) = 125x_{11} + 100x_{12} + 125x_{13} + 50x_{14} + \\ + 100x_{21} + 200x_{22} + 175x_{23} + 75x_{24} + \\ + 150x_{31} + 100x_{32} + 175x_{33} + 200x_{34} \rightarrow \min$$

funkcja celu minimalizująca łączne koszty transportu od wszystkich dostawców do wszystkich odbiorców.

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= \sum_{j=1}^4 x_{1j} = 70 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 80 \end{aligned} \right\}$$

warunki dla dostawców

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 50 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 50 \end{aligned} \right\}$$

warunki dla odbiorców

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, 4)$$

warunki brzegowe

Dla tak sformułowanego modelu wyznaczymy początkowe rozwiązanie dopuszczalne - przykładowo za pomocą **metody kąta północno zachodniego**, która polega na tym, że wypełnianie macierzy przewozów rozpoczyna się od klatki w lewym górnym rogu (stąd nazwa kąta północno-zachodniego). Wpisujemy do niej mniejszą z liczb A_1B_1 odpowiadających tej klatce, a następnie przesuwamy się w prawo lub w dół; w prawo – gdy towar i -tego dostawcy nie został jeszcze całkowicie rozdysponowany, w dół gdy całą podaż i -tego dostawcy rozdzielono odbiorcom.

W naszym przykładzie do klatki M_1Z_1 wpisujemy 40 t ($x_{11} = 40$) i przesuwamy się w prawo (ponieważ zapotrzebowanie Z_1 zostało zaspokojone, a M_1 pozostało jeszcze 30 t, które dostarczy do Z_2 ($x_{12} = 30$)). Obecnie przesuwamy się w dół – do M_2 , który dostarczy brakujące 30 t Z_2 ($x_{22} = 30$) i pozostałe 20 t – Z_3 ($x_{23} = 20$). Przesuwamy się ponownie w dół do M_3 , który dostarczy brakujące Z_3 30 t ($x_{33} = 30$) i pozostałe 50 t – Z_4 ($x_{34} = 50$). Rozwiązanie to przedstawiono w poniższej tabeli 6c; obok obliczono odpowiadające mu koszty transportu.

Zakłady Magazyny \	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	A_i
M_1	40	30			70
M_2		30	20		50
M_3			30	50	80
B_j	40	60	50	50	

Rozwiązaniu takiemu odpowiadają następujące koszty transportu:

$$125 \cdot 40 + 100 \cdot 30 + \\ + 200 \cdot 30 + 175 \cdot 20 + \\ + 175 \cdot 30 + 200 \cdot 50 = 32\,750 \text{ zł}$$

Rozwiązanie powyższe powinno być poprawiane w kolejnych iteracjach algorytmu transportowego, aż do momentu uzyskania rozwiązania optymalnego. Ponieważ jednak metoda kąta północno-zachodniego abstrahuje od kosztów transportu, dlatego też algorytm transportowy wymaga zwykle większej liczby iteracji niż wówczas, gdy rozwiązanie początkowe wyznaczymy inną metodą, np. metodą minimalnego elementu macierzy.

Metoda minimalnego elementu macierzy polega bowiem na rozmieszczeniu przewozów przede wszystkim na trasach, na których koszty są najniższe. Punktem wyjścia jest przekształcenie macierzy kosztów do takiej postaci, by w każdym wierszu i w każdej kolumnie występowało co najmniej jedno zero. Można to uzyskać, odejmując od elementów poszczególnych wierszy macierzy kosztów najmniejszy element znajdujący się w danym wierszu, a następnie od poszczególnych kolumn otrzymanej w ten sposób macierzy odejmując element najmniejszy znajdujący się w danej kolumnie.

Mając tak przekształconą macierz kosztów staramy się rozmieścić przewozy na trasy, gdzie obecnie koszty są najniższe, czyli gdzie występują zera. Rozmieszczanie przewozów rozpoczyna się od dowolnej "kratki z zerem". Jeżeli uda się rozmieścić przewozy wyłącznie w kratkach w których występują zera – otrzymane rozwiązanie jest już optymalnym planem przewozów. Jeżeli nie, należy je poprawiać stosując algorytm transportowy.

Podane niżej macierze c_1 i c_2 są przekształconymi macierzami kosztów. Macierz c_1 powstała w wyniku odjęcia od poszczególnych elementów macierzy (tablicy) kosztów najmniejszych elementów wierszy (od wiersza pierwszego odjęto 50, od drugiego – 75, od trzeciego - 100). Macierz c_2 powstała przez odjęcie od poszczególnych kolumn macierzy c_1 najmniejszych elementów odpowiednich kolumn (w pierwszej- 25, w trzeciej – 75, w drugiej i czwartej – 0).

$$c_1 = \begin{bmatrix} 75 & 50 & 75 & 0 \\ 25 & 125 & 100 & 0 \\ 50 & 0 & 75 & 100 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 125 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Rozdysponowanie przewozów rozpoczniemy np. od klatki M_2Z_1 gdzie można wpisać tylko 40 (bo tyle wynosi zapotrzebowanie Z_1). Przechodząc do drugiej kolumny – do klatki M_3Z_2 – wpisujemy 60, w kolumnie trzeciej występują dwa zera, wpisujemy np. 20 na trasę M_3Z_3 i 30 na trasę M_1Z_3 . Dla zbilansowania wpisujemy 40 na trasę M_1Z_4 i 10 na trasę M_2Z_4 . Ponieważ w tym wypadku udało się rozmieścić wszystkie przewozy w klatkach z zerami – otrzymane rozwiązanie jest optymalne. Rozwiązanie to i odpowiadające mu koszty przedstawiono poniżej.

Tablica 6d

Zakłady Magazyny \	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	A_i
M_1			30	40	70
M_2	40			10	50
M_3		60	20		80
B_j	40	60	50	50	

Rozwiązaniu takiemu odpowiadają następujące koszty transportu:

$$125 \cdot 30 + 50 \cdot 40 + 100 \cdot 40 + 75 \cdot 10 + 100 \cdot 60 + 175 \cdot 20 = 20\,000 \text{ zł}$$

a więc znacznie niższe niż w przypadku niż rozwiązanie początkowe wyznaczono metodą kąta północno-zachodniego (nie biorąc pod uwagę kosztów transportu). Zatem najniższe całkowite koszty transportu (20 000 zł) można osiągnąć, jeżeli magazyn M_1 dostarczy 30 t mąki do Z_3 i 40 t do Z_4 , magazyn M_2 – 40 t do Z_1 i 10 t do Z_4 , a M_3 : 60 t do Z_2 i 20 t do Z_3 .

W praktyce początkowe rozwiązanie dopuszczalne wyznacza się tylko jedną, wybraną metodą, a jak widać metoda minimalnego elementu macierzy daje z reguły wyniki znacznie bliższe rozwiązaniu optymalnemu. Metodę kąta północno-zachodniego przedstawiono jedynie jako jedną z pierwszych stosowanych w praktyce.

Przykład 7. Wprowadźmy do przykładu 6 zmianę polegającą na zwiększeniu podaży M_1 do 100 ton mąki; czyli obecnie $A_1 = 100$, $A_2 = 50$, $A_3 = 80$. Zapotrzebowania poszczególnych zakładów cukierniczych (B_j) oraz jednostkowe koszty transportu nie ulegają zmianie. Ponieważ obecnie $\sum A_i = 230 > \sum B_j = 200$ – jest to przykład otwartego zagadnienia transportowego

(OZT). Załóżmy zatem, że nadwyżka cukru ponad zapotrzebowanie odbiorców pozostanie w magazynach, przy czym jednostkowe koszty magazynowania wynoszą: w $M_1 - c_{15} = 20$, w $M_2 - c_{25} = 20$ i w $M_3 - c_{35} = 30$. Nadwyżka ta wynosi $230 - 200 = 30$ ton mąki — będzie to zapotrzebowanie fikcyjnego, piątego odbiorcy.

Po sprowadzeniu zagadnienia TO do TZ tablica 6a przybierze postać tablicy 7a.

Odbiorcy Dostawcy	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	M	A_i
M_1	125	100	125	50	20	100
M_2	100	200	175	75	20	50
M_3	150	100	175	200	30	80
B_j	40	60	50	50	30	

a model zadania w obecnej postaci jest następujący:

warunki dla dostawców:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= \sum_{j=1}^5 x_{1j} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= \sum_{j=1}^5 x_{2j} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= \sum_{j=1}^5 x_{3j} = 80 \end{aligned} \right\}$$

warunki dla odbiorców:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 50 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 50 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} &= \sum_{i=1}^3 x_{i5} = 30 \end{aligned} \right\}$$

$$125x_{11} + 100x_{12} + 125x_{13} + 50x_{14} + 20x_{15} + \dots + 175x_{34} + 200x_{35} \rightarrow \min \quad (\text{minimalizacja łącznych kosztów transportu i magazynowania}).$$

Macierze c_1 i c_2 oraz macierz optymalnych przewozów (x_{ij}^*) przedstawiono poniżej:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 105 & 80 & 105 & 30 & 0 \\ 80 & 180 & 155 & 55 & 0 \\ 120 & 70 & 145 & 170 & 0 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 110 & 50 & 25 & 0 \\ 40 & 0 & 40 & 140 & 0 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 60 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Również w tym przypadku w wyniku zastosowania metody minimalnego elementu macierzy otrzymano rozwiązanie optymalne (wszystkie przewozy udało się rozmieścić w klatkach z zerami. Zatem M_1 powinien dostarczyć 50 t mąki do Z_3 i 50 t do Z_4 , M_2 powinien dostarczyć 40 t do Z_1 i 10 ton pozostawić w magazynie, M_3 powinien dostarczyć 60 t do Z_2 i 20 t magazynować. Łączne koszty wyniosą: $6250 + 2500 + 4000 + 6000$ (koszty transportu) $+ 200 + 600$ (koszty magazynowania) $= 18750 + 800 = 19550$ zł.

Do ZZT można sprowadzić wiele problemów decyzyjnych, niekoniecznie mających interpretację transportową. Poniżej omówiono dwa zagadnienia sprowadzalne do ZZT – zagadnienie transportowo-produkcyjne i zagadnienie minimalizacji pustych przebiegów, omówiono poniżej.

W **zagadnieniu transportowo-produkcyjnym (ZT-P)** dostawcami są producenci towaru (a nie magazyny), a model najkrócej można scharakteryzować następująco:

M producentów pewnego jednorodnego produktu, z których każdy posiada zdolność produkcyjną A_i ($i = 1, \dots, M$) jednostek towaru zaopatruje w swoją produkcję N odbiorców. Każdy odbiorca zgłasza zapotrzebowanie na B_j jednostek ($j = 1, \dots, N$). Zakłada się, że łączne zdolności produkcyjne zakładów przekraczają łączne zapotrzebowanie. Dane są ponadto c_{ij} – jednostkowe koszty transportu towaru od i -tego zakładu dostawcy do j -tego odbiorcy oraz p_i – jednostkowe koszty produkcji w i -tym zakładzie. Towar nie został jeszcze wyprodukowany i należy podjąć decyzję gdzie go produkować i jak rozsyłać do odbiorców aby łączne koszty produkcji i transportu (oraz ewentualnie magazynowania nadwyżki) były możliwie najniższe.

Zadanie ZT-P można łatwo sprowadzić do ZZT przez:

a) wprowadzenie fikcyjnego odbiorcy – O_{N+1} , który reprezentować będzie niewykorzystane zdolności produkcyjne poszczególnych producentów i którego zapotrzebowanie jest różnicą pomiędzy sumą zdolności produkcyjnych wytwórców i sumą zapotrzebowań odbiorców, tzn.

$$B_{N+1} = \sum_{i=1}^M A_i - \sum_{j=1}^N B_j$$

b) skonstruowanie macierzy łącznych kosztów transportu i produkcji k_{ij} w następujący sposób:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= p_i + c_{ij} & (\text{dla } i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N) \\ k_{i,N+1} &= 0 & (\text{tzn. niewykorzystanym zdolnościom produkcyjnym odpowiadają koszty równe zeru}). \end{aligned}$$

Zauważmy jeszcze, że w zadaniu ZT-P wielkości $x_{i,N+1}$ to niewykorzystane zdolności produkcyjne poszczególnych wytwórców.

Przykład 8. Dostawcami będą obecnie producenci cukru – cukrownie. Trzy cukrownie zaopatrują w cukier cztery zakłady cukiernicze. Zdolności produkcyjne cukrowni (A_i), zapotrzebowanie zgłaszane przez zakłady cukiernicze (B_j), jednostkowe koszty transportu (c_{ij}) z cukrowni do zakładów oraz jednostkowe koszty produkcji cukru w poszczególnych cukrowniach (p_i) zestawiono w tablicy 8. Założmy dodatkowo, iż cukrownie będą wykorzystywać swe zdolności produkcyjne, a nadwyżkę cukru magazynować z przeznaczeniem na eksport. Jednostkowe koszty magazynowania w poszczególnych cukrowniach wynoszą kolejno: 20, 10, 10.

Tablica 8

Zakłady Cukrownie \	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	A_i	p_i
C_1	125	150	100	200	350	1540
C_2	75	125	150	175	300	1550
C_3	100	75	125	50	350	1570
B_j	200	200	200	200		

Należy opracować plan produkcji, transportu i magazynowania cukru, tak aby łączne koszty produkcji, transportu i magazynowania były możliwie najniższe.

Rozwiązanie:

Jest to przykład zagadnienia otwartego, gdyż $\sum A_i = 1000 > \sum B_j = 800$. Zmienne decyzyjne x_{ij} to wielkość produkcji cukru i -tej cukrowni ($i = 1, 2, 3$) dostarczona do j -tego zakładu ($j = 1, \dots, 5$), przy czym x_{i5} to ilość cukru jaka pozostanie w magazynie i -tej cukrowni).

Przed przystąpieniem do budowy modelu zapiszmy macierz łącznych kosztów produkcji, transportu i magazynowania – k_{ij} . Do kosztów transportu z pierwszej cukrowni należy dodać koszty produkcji 1 tony w tej cukrowni, czyli 1600, do kosztów transportu z drugiej cukrowni – 1550 i z trzeciej – 1570. Elementy piątej kolumny będą sumą kosztów produkcji i magazynowania w poszczególnych cukrowniach.

Macierz ta ma postać: $[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 1665 & 1690 & 1640 & 1740 & 1560 \\ 1625 & 1675 & 1700 & 1725 & 1560 \\ 1670 & 1645 & 1695 & 1620 & 1580 \end{bmatrix}$,

a model zadania jest następujący:

Warunki dla dostawców:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 350$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 350$$

Warunki dla odbiorców:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 200; \text{ w tym ostatnim warunku zapisano, iż łącznie w trzech cukrowniach należy zmagazynować 200 (1000-800) ton cukru.}$$

Funkcja celu:

$$F(x_{ij}) = 1665x_{11} + 1690x_{12} + 1640x_{13} + \dots + 1695x_{33} + 1620x_{34} + 1580x_{35} \rightarrow \min$$

Rozwiązanie optymalne, uzyskane za pomocą metody minimalnego elementu macierzy (co prawda nie wszystkie przewozy udało się rozmieścić w klatkach z zerami) jest następujące:

$$x_{13}^* = 200, \quad x_{15}^* = 150, \quad x_{21}^* = 200, \quad x_{24}^* = 50, \quad x_{25}^* = 50, \quad x_{32}^* = 200, \quad x_{34}^* = 150;$$

$$K(x_{ij}^*) = 1\,623\,250 \text{ zł.}$$

Solver z Excela poradził sobie jednak trochę lepiej:

$$x_{13}^* = 200, \quad x_{15}^* = 150, \quad x_{21}^* = 200, \quad x_{22}^* = 50, \quad x_{25}^* = 50, \quad x_{32}^* = 150, \quad x_{34}^* = 200;$$

$$K(x_{ij}^*) = 1\,619\,500 \text{ zł.}$$

Należy zauważyć, iż konstrukcja optymalnego planu przewozów jest możliwa także przy założeniu, że zdolności produkcyjne cukrowni będą wykorzystane tylko w takim stopniu jak tego wymaga zapotrzebowanie zakładów cukierniczych. Wówczas fikcyjnym odbiorcą będzie nie magazyn, lecz niewykorzystana zdolność produkcyjna; $k_{i5} = 0$ dla $i = 1, 2, 3$ (bo nie ponosimy ani kosztów produkcji, ani kosztów magazynowania), a rozwiązanie optymalne uzyskane za pomocą Solvera jest następujące:

$$x_{13}^* = 200, \quad x_{15}^* = 150, \quad x_{21}^* = 200, \quad x_{22}^* = 50, \quad x_{25}^* = 50, \quad x_{32}^* = 150, \quad x_{34}^* = 200,$$

$$K(x_{ij}^*) = 1\,307\,500 \text{ zł.}$$

Z tego rozwiązania wynika, że niewykorzystane zdolności produkcyjne pozostaną w cukrowniach C_1 (150 ton cukru) i C_2 (50 ton cukru).

O ile omawiane dotychczas zagadnienia dotyczyły optymalnych przewozów masy towarowej, o tyle zagadnienie **minimalizacji pustych przebiegów** dotyczy optymalnego krążenia środków transportu rozwożących towar.

Założmy, że istnieje N miast, między którymi odbywa się wymiana towarów. Miasta tworzą układ zamknięty, tzn. wymiana odbywa się tylko pomiędzy nimi i każde może być zarówno dostawcą, jak i odbiorcą. Do każdego z tych punktów przywozi się i z każdego z nich wywozi się w pewnym okresie określoną masę towarową nadającą się do transportu tym samym

środkiem transportu. Znane są odległości pomiędzy miastami (d_{ij} ; $i, j = 1, 2, \dots, N$), znany jest też przewóz masy towarowej pomiędzy miastami – a_{ij} wyrażony liczbą pełnych środków transportu (samochodów, wagonów itp.).

Dla każdego miasta można więc określić liczbę środków transportu niezbędną do wywiezienia masy towarowej (**wywóz** z i -tego miasta), wynoszącą:

$$w_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (i=1, \dots, N),$$

oraz liczę środków transportu niezbędną do przywiezienia masy towarowej (**przywóz** do miasta), który wynosi:

$$p_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad (j=1, \dots, N),$$

skąd wynika, że spełniona musi być równość:

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Natomiast dla poszczególnych miast wywóz (w_i) nie musi być równy przywozowi (p_i). Pozostaje więc problem zaopatrzenia w puste środki transportu tych miast, w których wywóz jest większy od przywozu przez te miasta, których wywóz jest mniejszy od przywozu (nie wykorzystują pewnej ilości nadchodzących środków transportu). Za optymalny plan przebiegu pustych środków transportu (samochodów, wagonów) uznaje się taki, przy którym łączny wagono(samochodo)kilometraż pustych przebiegów będzie minimalny, przy zaopatrzeniu wszystkich miast w niezbędną ilość pustych środków transportu.

Miasta dla których $w_j > p_j$, wystąpią jako **odbiorcy pustych środków transportu** ($j \in O$), ich zapotrzebowanie na puste środki transportu wyniesie: $B_j = w_j - p_j$ ($B_j > 0$), miasta dla których $w_i < p_i$, wystąpią jako **dostawcy pustych środków transportu** ($i \in D$); nadwyżka pustych środków transportu w tych miastach wyniesie $A_i = p_i - w_i$. Jeśli dla pewnego j $p_j = w_j$, to takie miasto eliminujemy z analizy. Znając wielkości dostaw pustych samochodów (A_i) i zapotrzebowania na puste samochody (B_j) oraz odległości pomiędzy miastami (d_{ij}) można ułożyć ZZT.

Przykład 9. Do ośmiu stacji kolejowych nadchodzą i są odprawiane przesyłki całowagonowe. Wielkości przywozu (p_i) i wywozu (w_i) wyrażone liczbą pełnych wagonów oraz odległości między stacjami (d_{ij}) zawiera tablica 2.7.

Tablica 9

Stacja (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	p_i
1	0	310	245	360	210	230	400	330	24
2		0	185	440	200	360	140	250	38
3			0	330	180	220	190	200	10
4				0	220	330	440	70	20
5					0	280	380	120	20
6						0	260	300	38
7							0	180	13
8								0	7
w_j	34	24	16	14	39	20	18	5	

Należy opracować plan przewozu pustych wagonów z miejscowości, które mają ich nadmiar do miejscowości które zgłaszają zapotrzebowanie na puste wagony, taki przy którym łączny wagonokilometraż pustych przebiegów będzie najmniejszy.

Rozwiązanie:

W tablicy 9a dokonano podziału analizowanych miejscowości na dostawców (D) i odbiorców (O) pustych wagonów, obliczając różnice pomiędzy przywozem i wywozem.

Tablica 9a

Stacja (i)	$w_i - p_i$	
1	$34 - 4 = 10$	O
2	$24 - 38 = -4$	D
3	$16 - 10 = 6$	O
4	$14 - 20 = -6$	D
5	$39 - 20 = 19$	O
6	$20 - 38 = -18$	D
7	$18 - 13 = 5$	O
8	$5 - 7 = -2$	D

W rezultacie problem sprowadza się do zamkniętego zagadnienia transportowego z czterema dostawcami i czterema odbiorcami, co przedstawia tablica 9b. Dostawcami pustych wagonów będą stacje 2, 4, 6, 8, a odbiorcami stacje 1, 3, 5, 7. W ostatniej kolumnie tablicy podano oferowane przez dostawców ilości pustych wagonów (A_i) a w ostatnim wierszu – zapotrzebowanie (B_j) na puste wagony zgłaszane przez stacje – odbiorców

Tablica 9b

Dostawcy \ Odbiorcy					A_i
	1	3	5	7	
2	310	185	200	140	14
4	360	330	220	440	6
6	230	220	280	260	18
8	330	200	120	180	2
B_j	10	6	19	5	

Wewnątrz tablicy podano odległości pomiędzy stacjami – dostawcami i stacjami – odbiorcami. Zmienne decyzyjne x_{ij} to ilości pustych wagonów jaką należy przesłać z miejscowości i ($i = 2, 4, 6, 8$) do miejscowości j ($j = 1, 3, 5, 7$). Model matematyczny zagadnienia jest następujący:

Funkcja celu:

$$K(x_{ij}) = 310x_{21} + 185x_{23} + 200x_{25} + 140x_{27} + \dots + 180x_{87} \rightarrow \min$$

Warunki dla dostawców:

$$x_{21} + x_{23} + x_{25} + x_{27} = 14$$

$$x_{41} + x_{43} + x_{45} + x_{47} = 6$$

$$x_{61} + x_{63} + x_{65} + x_{67} = 18$$

$$x_{81} + x_{83} + x_{85} + x_{87} = 2$$

Warunki dla odbiorców:

$$x_{21} + x_{41} + x_{61} + x_{81} = 10$$

$$x_{23} + x_{43} + x_{63} + x_{83} = 6$$

$$x_{25} + x_{45} + x_{65} + x_{85} = 19$$

$$x_{27} + x_{47} + x_{67} + x_{87} = 5$$

Warunki brzegowe:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in D, \quad j \in O.$$

W funkcji celu minimalizuje się wagonokilometraż pustych przebiegów.

4. PROGRAM DUALNY

Do każdego programu liniowego, który możemy uznać za **program pierwotny** (prymalny), możemy stworzyć **program doń dualny**. Jest to zadanie wyjątkowo proste w odniesieniu do zagadnienia standardowego (maksymalizacji względnie minimalizacji).

4.1. Program dualny do zagadnienia standardowego

Ponownie rozpatrzmy zapisane macierzowo standardowe zagadnienia liniowe maksymalizacji (3a) i minimalizacji (3b):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} (3a) \\ (3b) \end{array}$$

gdzie: $\mathbf{A}$ jest macierzą $M \times N$ współczynników stojących po lewej stronie układu warunków ograniczających (czyli mamy M warunków ograniczających i N zmiennych decyzyjnych), $\mathbf{b}$ jest wektorem kolumnowym M wyrazów wolnych układu warunków ograniczających, a $\mathbf{c}^T$ jest wektorem wierszowym N współczynników funkcji celu, zaś $\mathbf{x}$ jest wektorem kolumnowym N zmiennych decyzyjnych zagadnienia pierwotnego. Jeżeli teraz przez $\mathbf{y}$ oznaczymy sobie M -elementowy wektor kolumnowy nowych zmiennych decyzyjnych (zmiennych dualnych), to poniższy program (4a) jest **programem dualnym** do programu pierwotnego (3a), zaś program 4b) jest programem dualnym do programu (3b):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \max \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} (4a) \\ (4b) \end{array}$$

Jak więc widać: program dualny do standardowego zagadnienia maksymalizacji jest standardowym zagadnieniem minimalizacji, zaś program dualny do standardowego zagadnienia minimalizacji jest standardowym zagadnieniem maksymalizacji. Zatem, programy (3a) i (4a) oraz (3b) i (4b) są wzajemnie dualne: jak jeden uznamy za pierwotny, to drugi będzie dualny, i odwrotnie: jak drugi będzie pierwotny, to pierwszy będzie dualny.

Charakterystyczne dla programu dualnego jest to, że **ma tyle warunków ograniczających ile zmiennych miał** program pierwotny, zaś **zmiennych ma tyle, ile warunków miał** program pierwotny. Dalej, w programie dualnym **wagami funkcji celu są wyrazy wolne** zagadnienia pierwotnego, zaś **wyrazami wolnymi są wagi funkcji celu** programu pierwotnego. Te własności programu dualnego sprawiają, że może być atrakcyjny dla decydenta. Mianowicie, pierwotny problem decyzyjny może mieć liczne zmienne decyzyjne, ale niewielką liczbę warunków ograniczających, zatem program dualny będzie mieć liczne warunki ograniczające, ale niewielką liczbę zmiennych decyzyjnych, przez co może być łatwiejszy do rozwiązania. I gdyby istniał związek (przejście) między rozwiązaniami programów pierwotnego i dualnego, to korzyść z posiadania programu dualnego jest oczywista.

4.2. Niesymetryczne zagadnienie dualne

Program dualny łatwo utworzyć dla zagadnienia standardowego, ale rzeczywiste problemy decyzyjne rzadko mają strukturę zagadnienia standardowego (życie jest zwykle bogatsze niż wszelkie teoretyczne modele formalne): nie wszystkie warunki ograniczające mają kierunek nierówności zgodny z zagadnieniem standardowym (przypomnijmy: $\leq$ dla standardowego zagadnienia maksymalizacji i $\geq$ dla standardowego zagadnienia minimalizacji), niektóre warunki mogą mieć też postać równości. Ponadto nie wszystkie zmienne decyzyjne muszą być

nieujemne. Niektóre mogą być niedodatnie, inne zaś dowolne. Jak zatem w takiej sytuacji utworzyć program dualny do takiego zagadnienia pierwotnego, które nie ma struktury zagadnienia standardowego? Wbrew pozorom, sprawa jest prosta; mamy 4 proste reguły działające w dwie strony (tu trzeba pamiętać, że każdemu warunkowi ograniczającemu w jednym zagadnieniu odpowiada jakaś zmienna decyzyjna w drugim zagadnieniu, i na odwrót, każdej zmiennej decyzyjnej w drugim zagadnieniu odpowiada jakiś warunek ograniczający w pierwszym zagadnieniu):

1^o programem dualnym do pierwotnego zagadnienia maksymalizacji jest zagadnienie minimalizacji, i na odwrót, programem dualnym do pierwotnego zagadnienia minimalizacji jest zagadnienie maksymalizacji

2^o warunkom ograniczającym o kierunku nierówności zgodnym z zagadnieniem standardowym w jednym zagadnieniu, w drugim zagadnieniu odpowiadają nieujemne zmienne decyzyjne, i na odwrót: nieujemnym zmiennym decyzyjnym w jednym zagadnieniu w drugim zagadnieniu odpowiadają warunki o nierównościach zgodnych z zagadnieniem standardowym

3^o warunkom ograniczającym o kierunku nierówności niezgodnym z zagadnieniem standardowym w jednym zagadnieniu, w drugim zagadnieniu odpowiadają niedodatnie zmienne decyzyjne, i na odwrót: niedodatnim zmiennym decyzyjnym w jednym zagadnieniu w drugim odpowiadają warunki o nierównościach niezgodnych z zagadnieniem standardowym

4^o warunkom ograniczającym w postaci równości w jednym zagadnieniu, w drugim zagadnieniu odpowiadają dowolne zmienne decyzyjne, i na odwrót: dowolnym zmiennym decyzyjnym w jednym zagadnieniu w drugim odpowiadają warunki w postaci równości.

Przedstawione powyżej (w sposób werbalny) reguły zestawiliśmy bardziej formalnie w poniższej tabeli, zakładając że warunki i zmienne zostały tak przenieumerowane, że przy czytaniu tabeli z lewej na prawą (kiedy programem pierwotnym jest zagadnienie maksymalizacji) K pierwszych warunków ma kierunek nierówności zgodny z kierunkiem zagadnienia standardowego, L kolejnych warunków ma kierunek nierówności niezgodny z zagadnieniem standardowym, pozostałe zaś są równościami

program pierwotny		program dualny	
Funkcja celu	$\sum_{j=1}^N c_j x_j \rightarrow \max$	$\sum_{i=1}^M b_i y_i \rightarrow \min$	Funkcja celu
warunki ograniczające	$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, K$	$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, K$	zmienne decyzyjne
	$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = K + 1, \dots, L$	$y_i \geq 0 \quad i = K + 1, \dots, L$	
	$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = b_i \quad i = L + 1, \dots, M$	$y_i \in R \quad i = L + 1, \dots, M$	
zmienne decyzyjne	$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, S$	$\sum_{i=1}^M a_{ij} x_j \geq c_j \quad j = 1, \dots, S$	warunki ograniczające
	$x_j \geq 0 \quad j = S + 1, \dots, T$	$\sum_{i=1}^M a_{ij} x_j \leq c_j \quad j = S + 1, \dots, T$	
	$x_j \in R \quad j = T + 1, \dots, N$	$\sum_{i=1}^M a_{ij} x_j = c_j \quad j = T + 1, \dots, N$	
program dualny		program pierwotny	

Przykład 10. Utworzyć program dualny do poniższego programu pierwotnego:

$$F(x_1, \dots, x_4) = 4x_1 + 2x_2 + 28x_3 + 7x_4 \rightarrow \min$$

$$(1) \quad x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 8$$

$$(2) \quad x_1 - x_2 + 7x_3 \geq 10$$

$$(3) \quad x_1 \leq 0, \quad x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Rozwiązanie:

Niech y_1, y_2 będą zmiennymi decyzyjnymi programu dualnego (będą dwie zmienne dualne, bo program pierwotny ma tylko 2 warunki ograniczające; warunek (3) jest warunkiem brzegowym). W programie dualny funkcja celu będzie podlegała maksymalizacji, bowiem w programie pierwotnym jest ona minimalizowana. Skoro program pierwotny ma 4 zmienne decyzyjne, to program dualny będzie miał 4 warunki ograniczające, przy czym jeden warunek (pierwszy) będzie miał kierunek nierówności niezgodny z zagadnieniem standardowym (maksymalizacji), bo pierwsza zmienna decyzyjna w programie pierwotnym jest niedodatnia. Obydwie zmienne decyzyjne programu dualnego będą nieujemne, bo obydwa warunki ograniczające programu pierwotnego są postaci $\geq$, czyli mają kierunek nierówności zgodny z zagadnieniem standardowym (minimalizacji). Wobec tego program dualny będzie miał następującą postać:

$$G(y_1, y_2) = 8y_1 + 10y_2 \rightarrow \max$$

$$(1) \quad y_1 + y_2 \geq 4$$

$$(2) \quad y_1 - y_2 \leq 2$$

$$(3) \quad -3y_1 + 7y_2 \leq 28$$

$$(4) \quad y_1 \leq 7$$

$$(5) \quad y_1, y_2 \geq 0$$

4.2. ZWIĄZKI MIĘDZY ROZWIĄZANIEM ZAGADNIENIA PIERWOTNEGO I DUALNEGO (podstawowe twierdzenia o dualizmie)

Koncepcja programu dualnego jest między innymi dlatego pożyteczna, że istnieje jednoznaczny związek między rozwiązaniami optymalnymi obydwu zagadnień: znając rozwiązanie optymalnego jednego zagadnienia możemy wyliczyć rozwiązanie optymalnego drugiego zagadnienia. Związek ten wynika z podstawowych twierdzeń o dualizmie.

Twierdzenie 1 (o istnieniu)

Jeżeli obydwa zagadnienia (pierwotne i dualne) mają rozwiązania dopuszczalne (są niesprzeczne), to obydwa mają rozwiązania optymalne. Jeżeli chociaż jedno z nich nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to obydwa nie mają rozwiązań optymalnych.

Twierdzenie 2 (o optymalności)

Jeżeli $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym programu pierwotnego, a $\mathbf{y}^*$ jest rozwiązaniem programu dualnego, to te rozwiązania dopuszczalne będą optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy optymalne wartości funkcji celu będą równe (identyczne), tzn. $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$.

I najważniejsze twierdzenie, umożliwiające przejście od rozwiązania optymalnego jednego zagadnienia do rozwiązania optymalnego drugiego zagadnienia:

Twierdzenie 3 (o sumach dopełniających)

Jeżeli $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym programu pierwotnego, a $\mathbf{y}^*$ jest rozwiązaniem programu dualnego, to te rozwiązania dopuszczalne będą optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1) $\mathbf{y}^{*\top} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = 0$, czyli skalarnie $\forall i = 1, \dots, M \quad y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0$
- 2) $\mathbf{x}^{*\top} \cdot (\mathbf{A}^\top \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) = 0$, czyli skalarnie $\forall j = 1, \dots, N \quad x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^M a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0$.

Z warunku 1) wynika zaś, że jeżeli i -ta optymalna zmienna decyzyjna programu dualnego nie jest zerem, to odpowiadający tej zmiennej, czyli i -ty, warunek programu pierwotnego dla rozwiązań optymalnych musi być spełniony z równością. Z warunku 2) wynika, że jeśli j -ty warunek programu dualnego dla rozwiązań optymalnych jest spełniony ostro (wyrażenie w nawiasie nie jest zerem), to optymalna wartość odpowiadającej temu warunkowi, czyli j -tej zmiennej decyzyjnej programu pierwotnego jest równa zero (j -ta optymalna zmienna decyzyjna jest zerem: $x_j^* = 0$).

Przykład 11. Znaleźć rozwiązanie optymalne modelu z przykładu 10, wiedząc, że rozwiązanie optymalne programu dualnego to: $y_1^* = 7$ i $y_2^* = 7$.

Rozwiązanie:

Ponieważ y_1^*, y_2^* są niezerowe, to warunek (1) i (2) dla rozwiązań optymalnych x_1^*, x_2^*, x_3^* i x_4^* będą równościami, zatem

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_1^* + x_2^* - 3x_3^* + x_4^* = 8 \\ (2) \quad & x_1^* - x_2^* + 7x_3^* = 10 \end{aligned}$$

ale dla $y_1^* = 7$ i $y_2^* = 7$ warunki (1) i (2) programu dualnego są spełnione ostro ($y_1^* + y_2^* = 7 + 7 = 14 > 4$; $y_1^* - y_2^* = 7 - 7 = 0 < 2$), wobec tego, w myśl twierdzenia o sumach dopełniających: $x_1^* = 0$ i $x_2^* = 0$. Ostatecznie mamy zatem:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -3x_3^* + x_4^* = 8 \quad \Rightarrow \quad x_4^* = 86/7 \\ (2) \quad & 7x_3^* = 10 \quad \Rightarrow \quad x_3^* = 10/7 \end{aligned}$$

wobec tego pełne rozwiązanie programu pierwotnego to: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 10/7$ i $x_4^* = 86/7$. Kontrolne obliczenia:

$$G(y_1^*, y_2^*) = 8 \cdot 7 + 10 \cdot 7 = 126 = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 28 \cdot \frac{10}{7} + 7 \cdot \frac{86}{7} = F(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$$

pokazują, że przejście od rozwiązania optymalnego programu dualnego do rozwiązania optymalnego programu pierwotnego odbyło się poprawnie, bowiem zgodnie z Twierdzeniem 2 optymalne wartości funkcji celu są identyczne.

4.3. INTERPRETACJA ZMIENNYCH DUALNYCH

Interpretacja zmiennych dualnych jest najbardziej wyrazista w przypadku zagadnienia wyboru asortymentu produkcji. Gdybyśmy chcieli dokupić dodatkową jednostkę i -tego limi-

towanego środka produkcji, to musimy sobie zadać pytanie: ile maksymalnie możemy zapłacić za tę dodatkową jednostkę owego i -tego limitowanego środka produkcji. Zapewne nie więcej niż możemy zyskać zwiększając produkcję dzięki owej dodatkowej jednostce. Z równości optymalnych wartości funkcji celu (Twierdzenie 2) wynika, że zwiększenie limitu i -tego środka produkcji o jednostkę zwiększa wartość funkcji celu zagadnienia dualnego, a tym samym programu pierwotnego o y_i^* (bo i -ty składnik nowej funkcji celu jest równy: $(b_i + 1)y_i^* = b_i y_i^* + y_i^*$). Zatem optymalna wartość zmiennej dualnej jest maksymalną **ceną (dualną), jaką warto dać za dodatkową jednostkę** limitowanego środka produkcji.

Ta interpretacja pokazuje, że znaczenie programu dualnego wykracza poza możliwość pośredniego rozwiązania programu pierwotnego za pośrednictwem programu dualnego, kiedy rozwiązanie tego pierwszego wprost (bezpośrednio) może być zbyt trudne (pracochłonne) czy wręcz niemożliwe. Czasami należy rozwiązać program dualny, aby pogłębić zrozumienie programu pierwotnego.